

Θέμα Α,

Α1. Απόδειξη, § 2.6, σελ. 133

Α2. Θεώρημα, § 1.5, σελ. 51

Α3. Ορισμός, § 1.2, σελ. 23

Α4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

## Θέμα Β.

B1.  $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Βαδίζω όπου  $x$ , το  $x-1$   
 $f(x-1+1) = (x-1+1) e^{-(x-1)} \Rightarrow f(x) = x e^{1-x}$ .

B2.  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = e^{1-x} (1-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$			

άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$

και γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 = 1$ ,  
 το  $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$ .

B3.  $f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(-1+x-1)$   
 $= e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			

άρα η  $f$  είναι: • κοίλη στο  $(-\infty, 2]$

• κυρτή στο  $[2, +\infty)$

και παρουσιάζει καμψη στο  $x = 2$

$$f(2) = 2 e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Άρα, η  $f$  έχει ένα μόνο σημείο καμψής, το  $(2, \frac{2}{e})$

Επίσης

•  $D_f = \mathbb{R}$ , άρα η  $C_f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

• Στο  $+\infty$ :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , άρα η ευθεία  $y=0$ , δηλ. ο  $x$ 's

είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$ .

• Στο  $-\infty$ :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , άρα η  $C_f$  δεν έχει οριζόντια

ασύμπτωτη στο  $-\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = +\infty$$

άρα η  $C_f$  δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο  $-\infty$ .

B4. i) στο  $A_1 = (-\infty, 1]$ ;  $f$  συνεχής και γρ. αλβανούσα  
 άρα  $f(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)]$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$ ,

γιατί  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$

$x \rightarrow -\infty$ , άρα  $u \rightarrow +\infty$

•  $f(1) = 1$

άρα  $f(A_1) = (-\infty, 1]$

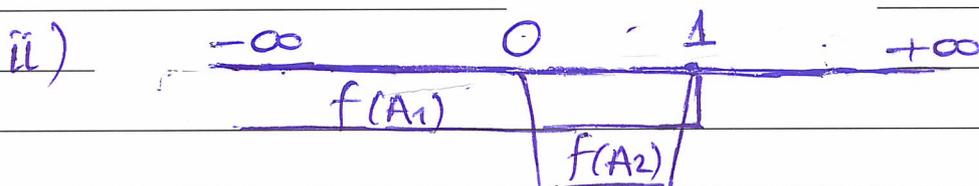
• στο  $A_2 = (1, +\infty)$   $f$  συνεχής και γρ. φθίνουσα  
 άρα  $f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x))$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$   
 $\frac{+\infty}{+\infty}$  DLH

•  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$ , αφού  $f$  συνεχής

άρα  $f(A_2) = (0, 1)$

Τελικά, το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  
 $f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$



• αν  $\lambda \in (1, +\infty)$ : καμία λύση

• αν  $\lambda \in (0, 1)$ :

•  $\lambda \in f(A_1)$  και  $f \uparrow$  στο  $A_1$ : ακριβώς 1 λύση στο  $A_1$

•  $\lambda \in f(A_2)$  και  $f \downarrow$  στο  $A_2$ : " 1 " στο  $A_2$

Σύνολο: 2 λύσεις

• αν  $\lambda \in (-\infty, 0)$

•  $\lambda \in f(A_1)$  και  $f \uparrow$  στο  $A_1$ : ακριβώς 1 λύση στο  $A_1$

$\lambda \notin f(A_2)$  : καμία λύση στο  $A_2$   
 Συνολικά : 1 λύση

• αν  $\lambda = 0$

- $0 \in f(A_1)$  κ  $f \uparrow$  στο  $A_1$  : ακριβώς 1 λύση στο  $A_1$
- $0 \notin f(A_2)$  : καμία λύση στο  $A_2$

• αν  $\lambda = 1$

- $1 \in f(A_1)$  κ  $f \uparrow$  στο  $A_1$  : ακριβώς 1 λύση στο  $A_1$
- $1 \notin f(A_2)$  : καμία λύση στο  $A_2$

Συνολικά : 1 λύση, την  $x = 1$ .

# Θέμα Γ

$$\Gamma 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma \omega x = 1$$

$$f(0) = 1$$

}  $f$  συνεχής στο 0

Για  $x < 0$ , συνεχής ως πολυωνυμική

Για  $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ , συνεχής. Άρα  $f$  συνεχής στο  $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \omega x - 1}{x} = 0, \text{ άρα}$$

$f$  δεν είναι παράγουσα στο 0

- $\Gamma 2. i) f$  συνεχής στο  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  εφόσον  $f$  συνεχής. ✓
- $f$  παράγουσα στο  $(0, \frac{3\pi}{2})$  με  $f'(x) = -\eta \mu x$  ✓
  - $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{3\pi}{2}) = \sigma \omega \frac{3\pi}{2} = 0$  δεν ικανοποιείται η συνθήκη:  $f(0) = f(\frac{3\pi}{2})$

$ii) f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$   
 μοναδική ρίζα του  $\eta \mu x$  στο  $(0, \frac{3\pi}{2})$   
 άρα  $\Sigma = \pi$ .

$\Gamma 3.$  Για  $x < 0$   $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$   
 αν υπάρχουν σημεία στα οποία εφαύνη //  $x'x$   
 τότε  $f'(x_0) = 0$   
 άρα  $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$   
 $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0$   
 εφόσον  $\alpha < -3$   
 άρα ΑΤΟΠΟ. Άρα δεν υπάρχουν σημεία της  $f$   
 με  $x < 0$  ώστε εφαύνη //  $x'x$

Γ4. • Για  $x < 0$ :  $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$

αφού  $\Delta < 0$  και  $3a < 0$

• Για  $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ :  $f'(x) = -\psi x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi$$

οπότε

$x$	$-\infty$	$0$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$	-			
$f'(x) = -\psi x$			-	+
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$				

Άρα, η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = \pi$ , το  $f(\pi) = -1$   
 οπότε για κάθε  $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$ :

$$f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1.$$

Θέμα Δ

Δ1.  $\ln x - \frac{1}{x} = 0 \quad (1)$

Θέτω  $F(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$

• F συνεχής στο  $[1, e]$

•  $F(1) = -1 < 0$

$F(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

άρα  $F(1) \cdot F(e) < 0$ , οπότε (θ. Bolzano) υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (1, e)$ , ώστε  $F(x_0) = 0$

Επιπλέον,  $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

άρα η F είναι γν. αύξουσα, οπότε το  $x_0$  είναι μοναδικό.

Δ2.  $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1, x > 0$

όπου:  $\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 \cdot \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = 1$   
 $\Leftrightarrow x_0^{x_0} = e. \quad (2)$

• f συνεχής στο  $(0, +\infty)$

•  $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{(\ln x_0) \cdot x - 1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln x_0} \Leftrightarrow x > x_0 \quad (\ln x_0 = \frac{1}{x_0} > 0)$

x	0	$x_0$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↗ O.E.T ↘		

άρα, η f έχει ολικό ελάχιστο στο  $x_0$ ,

το  $f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1$

$= \frac{1}{x_0} (x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1$

$= 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0.$

$$\Delta 3. g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)(\ln x_0 - \ln e)$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (\ln x_0) \cdot x - x + \ln x_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = (\ln x_0)(x+1) - 1 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0$$

από το  $\Delta 2$ ;  $x = x_0$  (μοναδική ρίζα)

Άρα, οι  $C_g$  και  $C_h$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο με ζητητέον τον  $x_0$  του  $\Delta 1$ .

Επίσης:

$$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = e^{-x_0}(1 - x_0) = \frac{1 - x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} (\ln x_0 - \ln e)$$

$$= \frac{x_0^{x_0} \cdot x_0}{e^{x_0} \cdot e} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{e^{-x_0} \cdot x_0}{e^{x_0} \cdot e} \cdot \frac{1 - x_0}{x_0} =$$

$$= \frac{1 - x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα  $g'(x_0) = h'(x_0)$ ,  
οπότε οι  $C_g$  και  $C_h$  έχουν και κοινή εφαπτομένη στο  $x_0$ .

$$\Delta 4. \quad d(A, B) = f(x) - \varphi(x),$$

Θέσω :

$$a(x) = f(x) - \varphi(x), \quad x > 0$$

■ αν η  $\varphi$  δεν είναι παράγωγη στο  $x_0$ , τότε το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi$ .

■ αν η  $\varphi$  είναι παράγωγη στο  $x_0$ , τότε και η  $a(x)$  θα είναι παράγωγη στο  $x_0$ , οπότε (θ. Fermat):

$$a'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Rightarrow \varphi'(x_0) = 0, \text{ αφού } f'(x_0) = 0, \text{ από το } \Delta 2$$